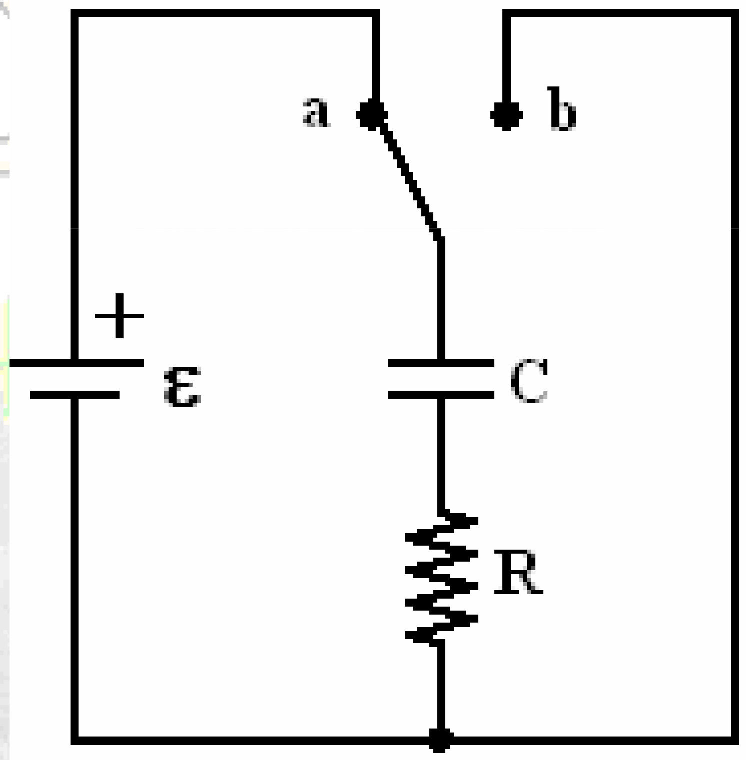
CIRCUITO RC

Se llama circuito RC a la combinación en serie de un capacitor y un resistor. Dicho circuito puede representar cualquier conexión de resistores y capacitores cuyo equivalente sea un solo resistor en serie con un solo capacitor.

CIRCUITO RC

En la figura se muestra un circuito RC conectado a una fuente de voltaje continuo. El interruptor tiene como objetivo cargar y descargar al capacitor.



CIRCUITO RC

El proceso inicia cuando el interruptor se conmuta a la posición “a” en el tiempo t=0 [s] y se considera que el capacitor se encuentra descargado. Aplicando ley de kirchhoff a la malla

$$V_R + V_c = \varepsilon$$

$$R \cdot I + V_C = \varepsilon$$

$$I = I_R = I_C = C\frac{dV_c}{dt}$$

CIRCUITO RC

Sustituyendo

$$R \cdot C \frac{dV_C}{dt} + V_c = \varepsilon$$

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} V_c = \varepsilon(\frac{1}{R \cdot C})$$

CIRCUITO RC

Ecuación diferencial lineal de primer orden, no homogénea y de coeficientes constantes, cuya solución consta de dos partes: la solución homogénea y la solución particular.

1º. La solución homogénea

$$\frac{dV_{ch}}{dt} + \frac{V_{ch}}{RC} = 0$$

$$\frac{dV_{ch}}{V_{ch}} = -\frac{1}{RC}dt$$

CIRCUITO RC

Al integrar ambos miembros de la igualdad.

$$\ln V_{ch} + C_1 = -\frac{t}{RC}$$

$$C_1 = -\ln K$$

$$\ln \frac{V_{ch}}{k} = -\frac{t}{RC}$$

CIRCUITO RC

Obteniendo el antilogaritmo en ambos miembros.

$$\frac{V_{ch}}{K} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_{ch} = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

CIRCUITO RC

2º. La solución particular

Debido a que el segundo miembro de la ecuación diferencial no homogénea es una constante, la solución particular será del tipo

$$V_{cp} = A$$

$$A = \text{cons}\tan\text{te}$$

$$\frac{1}{RC}A = \frac{\varepsilon}{RC}$$

$$A = \varepsilon = V_{cp}$$

CIRCUITO RC

La solución completa es

$$V_c(t) = V_{ch} + V_{cp} = Ke^{-\frac{t}{RC}} + \varepsilon$$

$$\text{Como } V_c(0) = 0 = ke^{0} + \varepsilon$$

CIRCUITO RC

entonces

$$k = -\varepsilon$$

Finalmente

$$V_c(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

CIRCUITO RC

la corriente

$$I_c(t) = C\frac{dV_c}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

CIRCUITO RC

Definiendo la constante de tiempo como

$$\tau_c = RC$$

Las ecuaciones anteriores se expresan como:

CIRCUITO RC

$$V_c(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right)$$

$$I_c(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

CIRCUITO RC

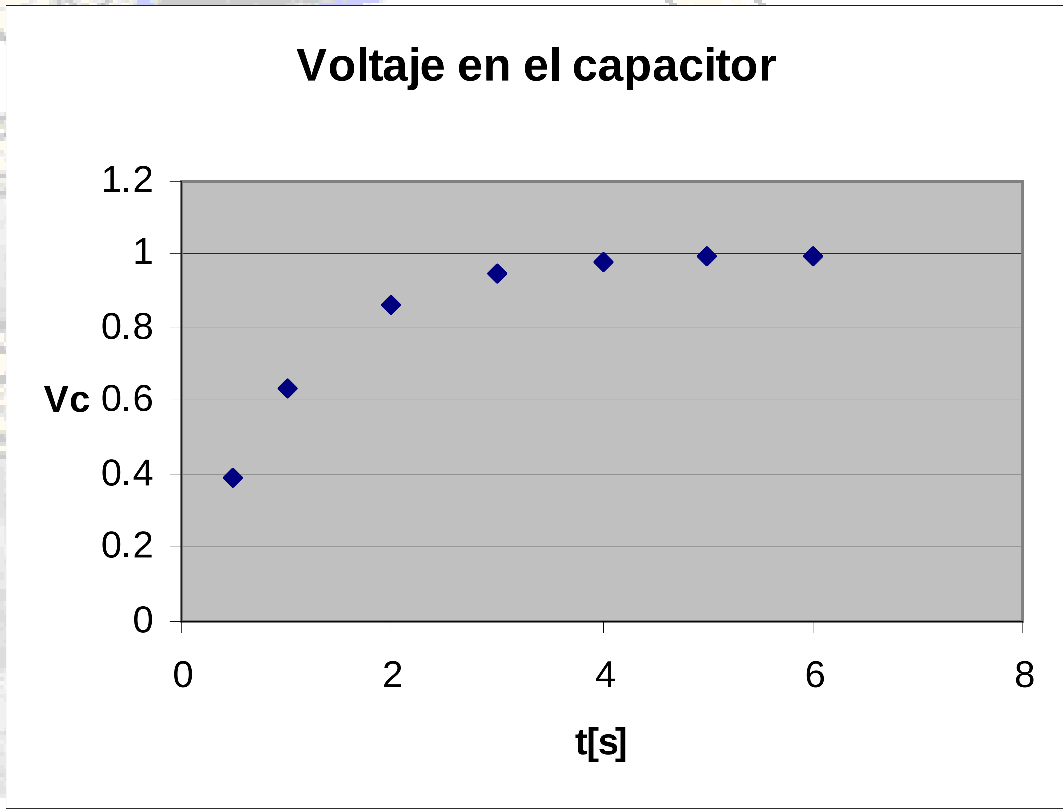
Las siguientes figuras muestran las gráficas de las ecuaciones anteriores en función del tiempo y con una escala en múltiplos de

$$\tau_c$$

t	Vc	Ic
$0.5\tau_c$	0.394	0.607
τ_c	0.632	0.368
$2\tau_c$	0.865	0.135
$3\tau_c$	0.950	0.050
$4\tau_c$	0.982	0.018
$5\tau_c$	0.993	0.007
$6\tau_c$	0.998	0.002

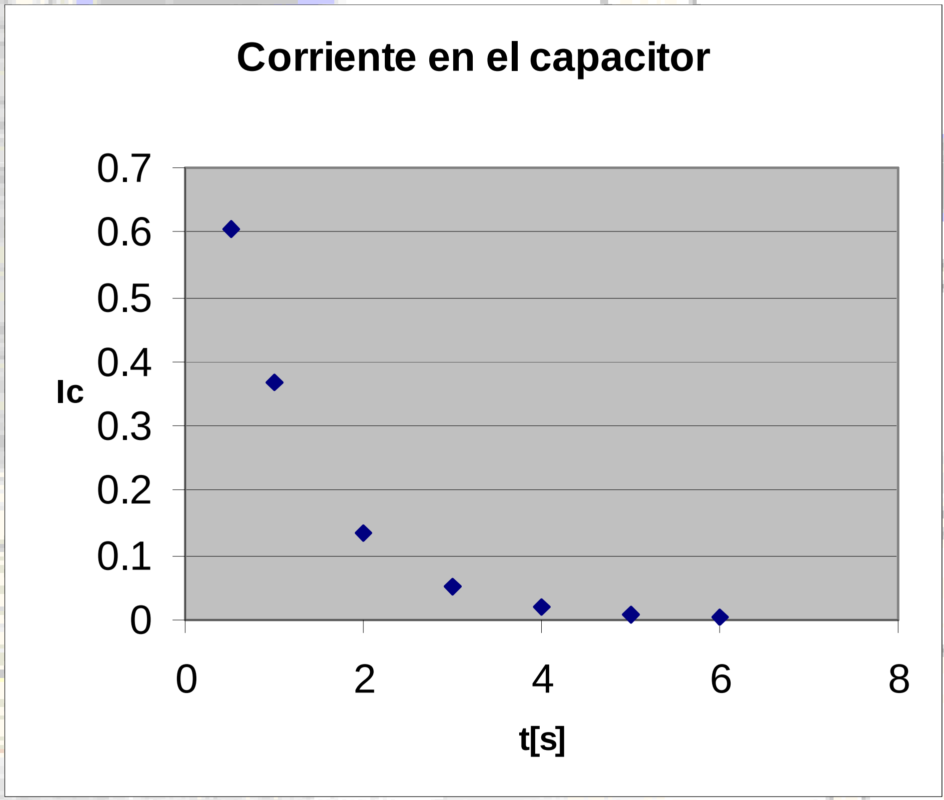
CIRCUITO RC

Gráfica de voltaje en el capacitor



CIRCUITO RC

Gráfica de corriente en el capacitor



CIRCUITO RC

En las gráficas o en las ecuaciones, se observa que el capacitor, para cuando, se carga y adquiere el voltaje de la fuente ε. Para entonces ya no existe diferencia de potencial en las terminales del resistor, por lo que la corriente es cero, es decir, si

$$t \to \infty$$

$$V_c(\infty) = \varepsilon$$

$$I_c(\infty) = 0$$

CIRCUITO RC

Afortunadamente no es necesario esperar un tiempo infinito para considerar que el capacitor se ha cargado, de acuerdo con las gráficas para el tiempo $t = 4\tau_c$

el capacitor prácticamente ya se cargo y la corriente es casi nula. Es decir, para

CIRCUITO RC

$$t = 4\tau_c$$

se ha alcanzado el 98.2% del valor final del voltaje en el capacitor y se tiene el 1.8% de la corriente inicial en el circuito; es por ello que, para fines prácticos, se considera que para

$$t \geq 4\tau_C$$

se han alcanzado las condiciones estables del circuito.

CIRCUITO RC

Resumiendo:

En el tiempo t=0 el capacitor se comporta como un corto circuito ya fluye la máxima corriente.

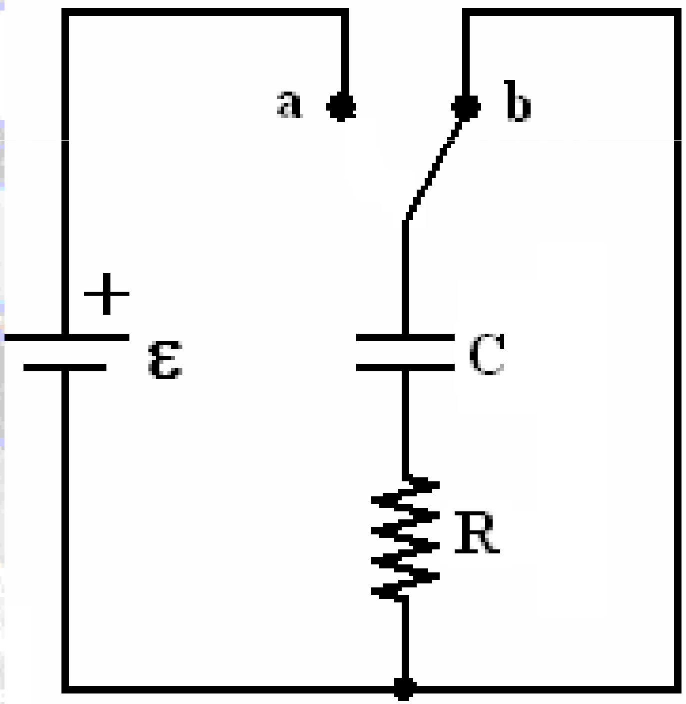
En el tiempo $t = 4\tau$ o mayor el capacitor se comporta como circuito abierto ya que en sus extremos tiene un voltaje, prácticamente, igual al de la fuente y ya no circula corriente.

CIRCUITO RC

Si Después de cargado el capacitor hasta alcanzar una diferencia de potencial $V_c=V_0$ se cambia el interruptor a la posición "b", como se muestra en la siguiente figura, se obtendrá un circuito a través del cual se pueda descargar el capacitor, transformando su energía almacenada en energía en forma de calor en el resistor.

CIRCUITO RC

Circuito de descarga



CIRCUITO RC

Aplicando la LVK

$$V_R - V_c = 0$$

Pero $$V_R = RI_R \quad \text{e} \quad I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

Además $$I_R = -I_C$$

Al sustituir todas las expresiones en la primera ecuación se tiene:

CIRCUITO RC

$$RC\frac{dV_C}{dt}+V_C=0$$

Dividiendo entre RC

$$\frac{dV_C}{dt}+\frac{1}{RC}V_C=0$$

CIRCUITO RC

La solución de esta última ecuación es:

$$V_c(t) = V_{Ch} = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Utilizando las condiciones iniciales para evaluar K

$$V_C(0) = V_0 = ke^0 = k$$

Finalmente

$$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

CIRCUITO RC

y la corriente se obtiene

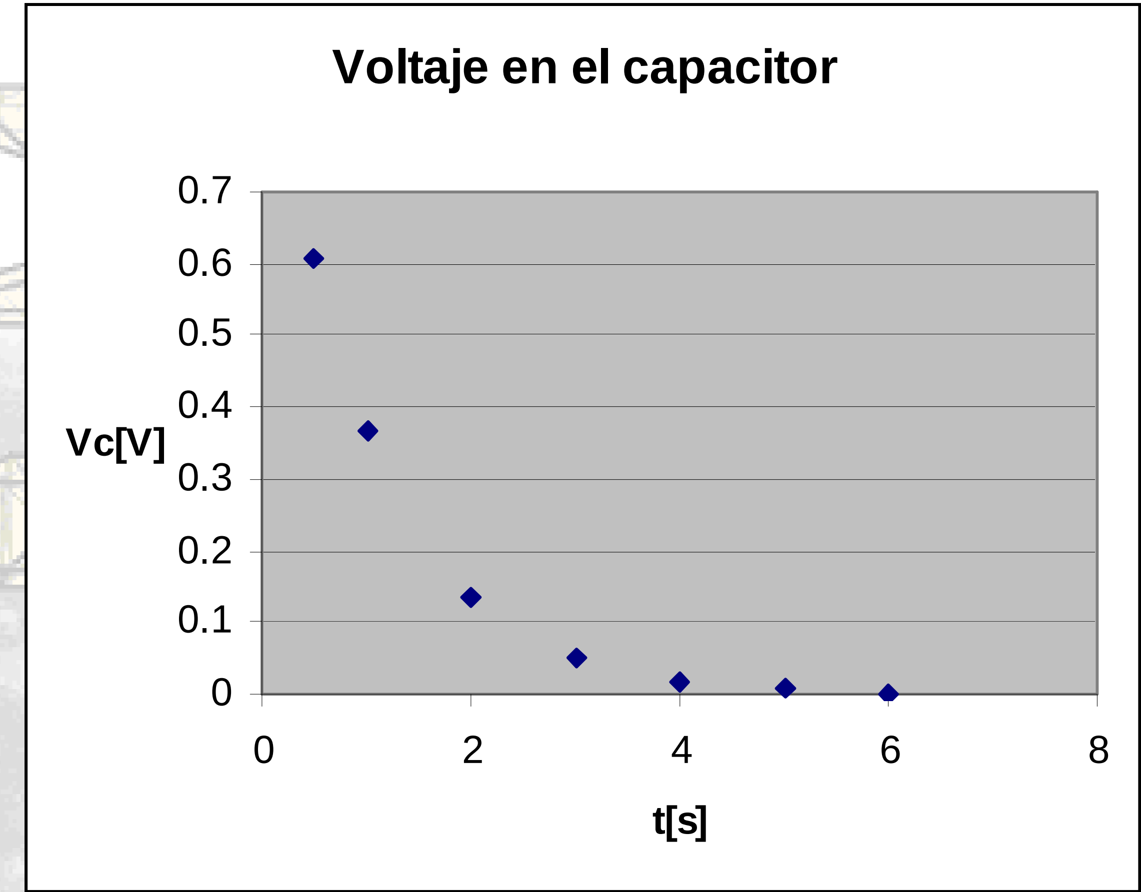
$$I_C = C\frac{dV_C}{dt} = -\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

En la tabla siguiente se muestran los valores de la diferencia de potencial y de la corriente en el capacitor para diferentes valores de la constante de tiempo τ y considerando como condiciones iniciales Vc=V0=1 [V] y Vo/R=1 [A].

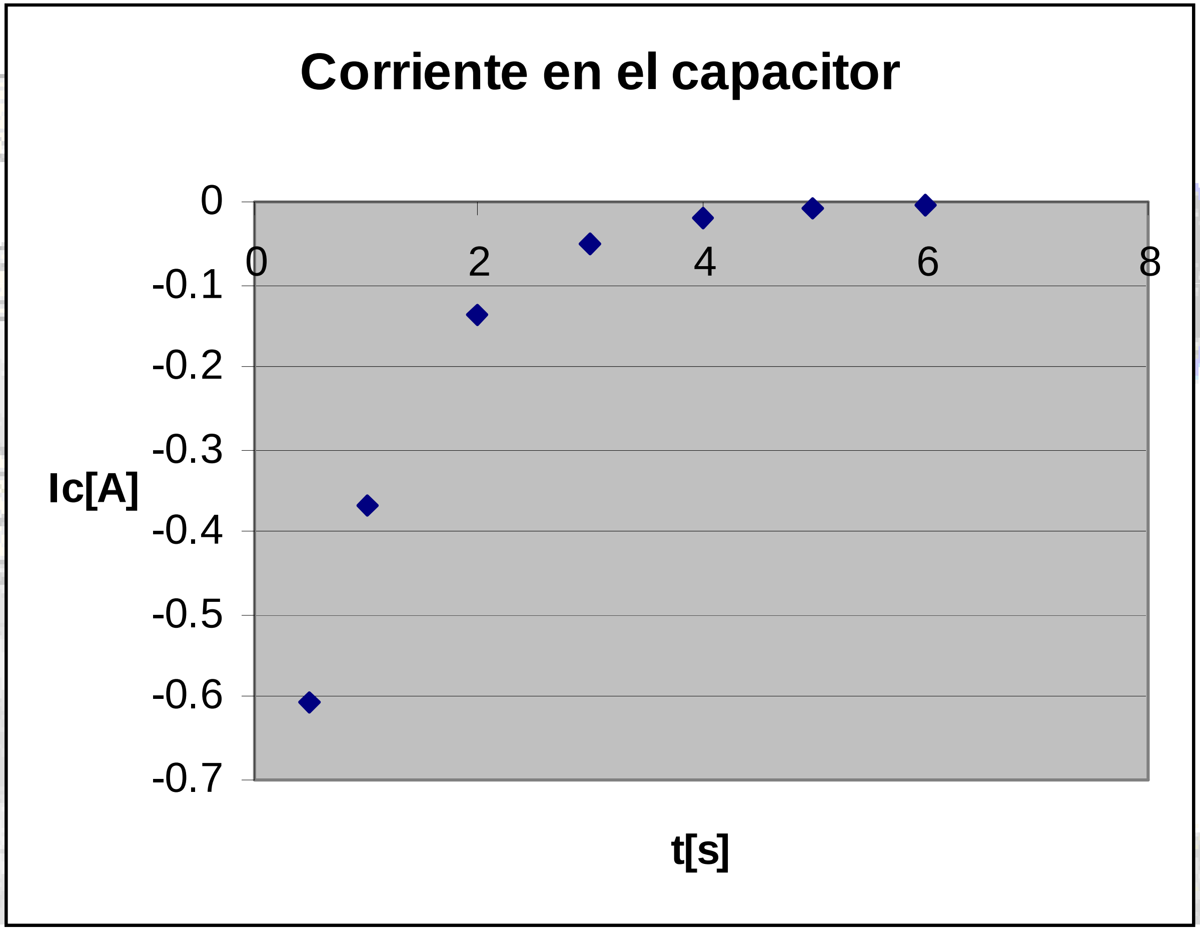
CIRCUITO RC

t	Vc	Ic
0.5 τ	0.607	-0.607
1 τ	0.368	-0.368
2 τ	0.135	-0.135
3 τ	0.050	-0.050
4 τ	0.018	-0.018
5 τ	0.007	-0.007
6 τ	0.002	-0.002

CIRCUITO RC



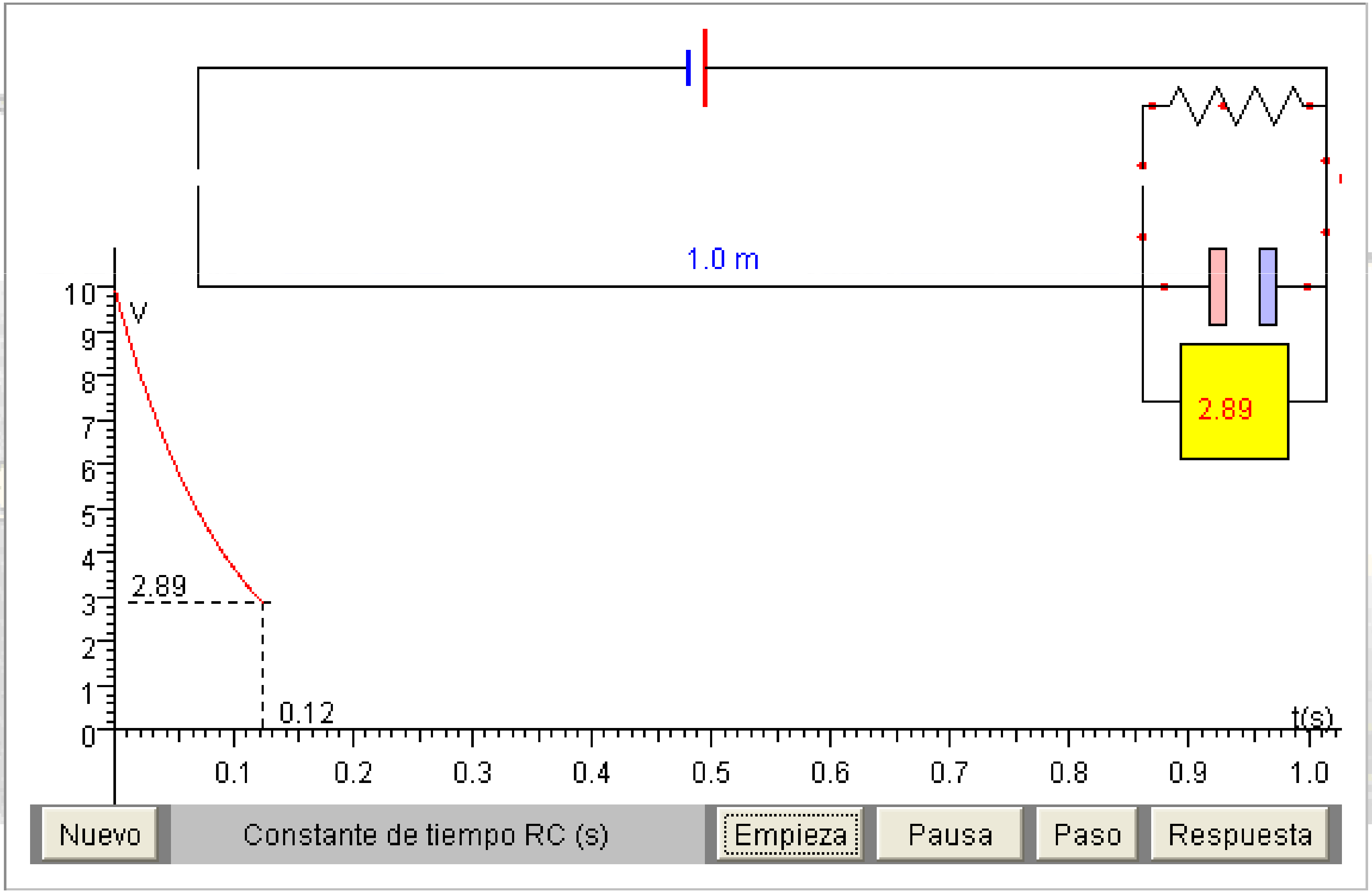
CIRCUITO RC



Circuito RC

- Circuito RC simulador.

CIRCUITO RC



1.0 m
2.89
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
V
2.89
0.12
t(s)
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
Nuevo
Constante de tiempo RC (s)
Empieza
Pausa
Paso
Respuesta

CIRCUITO RC

En la figura anterior se muestra un circuito que cuantifica la velocidad de una bala. Inicialmente se selecciona el valor de la resistencia y el capacitor (tao=0.096[s], cuando la bala pasa por el primer contacto y lo rompe el capacitor se empieza a descarga a través de la resistencia, cuando la bala rompe el segundo contacto se detiene el proceso. Un voltímetro indica el valor del voltaje en los extremos del capacitor. De la ecuación de descarga se determina el tiempo y de la definición de velocidad, se cuantifica ésta conociendo que la distancia es de 1 [m]. El simulado da el resultado.

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/campo_electrico/velocidad_bala/velocidad_bala.htm .

CIRCUITO RC

El circuito mostrado tiene los siguientes valores: $E_1 = 10$, $r_1 = 10$, $E_2 = 20$, $r_2 \approx 0$, $E_3 = E_1$, $r_3 = r_1$, $R_1 = 100$, $R_2 = R_3 = 200$, $R_C = 2$, $C_1 = 20$, $C_2 = 30$. Si el interruptor S permanece abierto para los incisos a), b) y c) y si se cierra para el inciso d), sabiendo que la diferencia de potencial inicial en ambos capacitores es de 0 , determine:

CIRCUITO RC

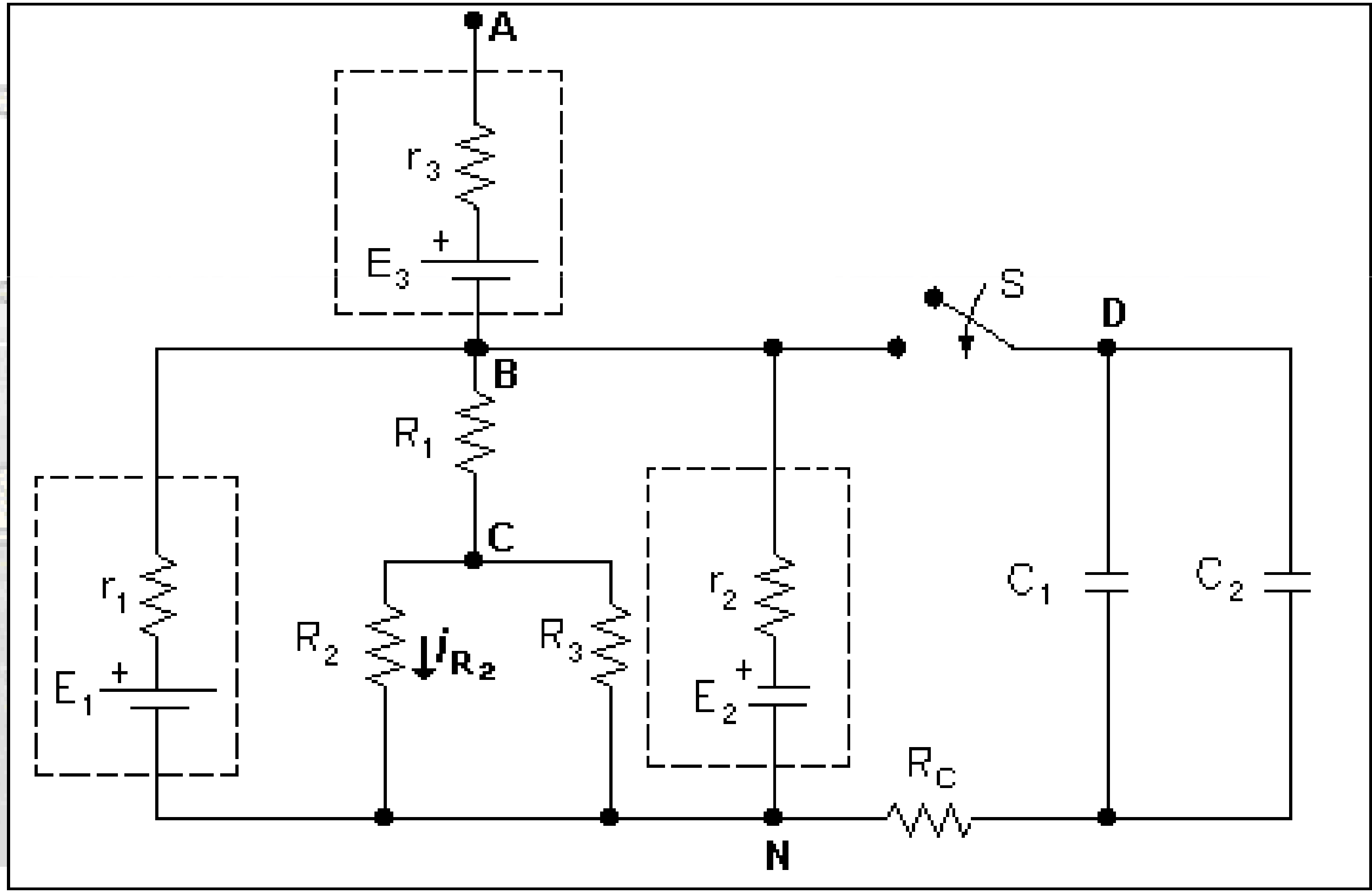
La corriente eléctrica I_{R_2}.

La diferencia de potencial V_{AN}.

La energía que entrega o recibe la fuente ideal E_1 en 5 minutos.

Con el interruptor S cerrado en t0=0[s], la energía almacenada en C1 en el instante $t = 2\tau$.

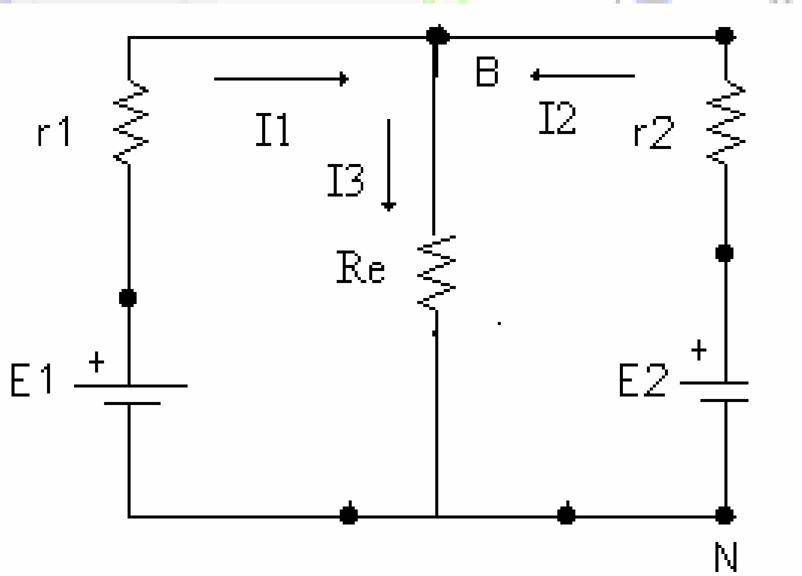
CIRCUITO RC



CIRCUITO RC

1.a) La corriente eléctrica en R2. (IR2).

La Fem E3 y r3 están en circuito abierto y el interruptor “s” esta abierto, por lo tanto el circuito queda como se muestra en la figura



CIRCUITO RC

La resistencia equivalente del paralelo de R2 y R3 y en serie con R1, es:

$Re=(R2xR3)/(R2+R3)+R1=$

$(200x200)/(200+200)+100 = 200\ [\Omega].$

El circuito resultante se muestra en la figura 2.

LKC al nodo B $\quad I1+I2=I3 \quad ...(1)$

LKV a la malla de la izquierda

$$E1 = 10I1+200I3 \qquad ...(2)$$

LKV a la malla de la derecha

$$E2 = r2I2 + ReI3 \qquad ...(3)$$

CIRCUITO RC

De los datos del problema se sabe que r2 es aproximadamente igual a cero, por lo tanto de (3).

I3 = E2/Re = 20/200 = 0.1 [A].

Sustituyendo en (2) y despejando I1.

I1 = (E1-200I3)/10 = (10-20)/10 = -1 [A]

De la expresión (1). I2=I3-I1 = -0.1-1 = -1.1[A]

La diferencia de potencial entre el nodo C y tierra es I3 (R2//R3) = 10 [V], por lo tanto

IR2= VCN/200 = 0.05 [A].

CIRCUITO RC

1.b) La diferencia de potencial V_{AN} se puede obtener por la siguiente trayectoria.

VAN = -Ir3 r3 + E3 +I3(Re); como Ir3 = 0

VAN = E3 + E2 = 10 + 20 = 30 [V]

1.c) La potencia de E1 es: PE1= E1(I1) = 10 (-1) = -10 [W] y la energía en 5 minutos es:

U1 = P1t = (-10 W)(300s)= -3000 [J]

El signo menos indica que la corriente entra a la fuente y por lo tanto absorbe energía

CIRCUITO RC

1.d) Al cerrar el interruptor S.

Como r2 = 0 y los capacitores C1 y C2 están en paralelo el circuito mínimo está constituido por una RC de 2 [KΩ] y un capacitor equivalente de 50 [μF]. El voltaje en los extremos del capacitor equivalente para el instante t = 2τ es:

$$V_{ce} = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC_e}}\right) = 20\left(1 - e^{-\frac{2\tau}{\tau}}\right) = 20\left(1 - e^{-2}\right) = 17.29[V]$$

CIRCUITO RC

Como Vce = Vc1=Vc2= 17.29 [V] por estar en paralelo los capacitores C1 y C2. Entonces la energía

Uc1=0.5C1 (Vc1)2 = 0.5 (20x10-6)x(17.29)2 = 2.989 [mJ].

Bibliografía.

Gabriel A. Jaramillo Morales, Alfonso A. Alvarado Castellanos.

Electricidad y magnetismo.

Ed. Trillas. México 2003

Sears, Zemansky, Young, Freedman

Física Universitaria

Ed. PEARSON. México 2005